Geometría Algebraica *&* Ciencia: ¿demasiado álgebra o hacia un nuevo paradigma teórico-computacional?

Alexandru Iosif
Universidad Rey Juan Carlos de Madrid

3,14...
MMXXIII

¿Qué es la Geometría Algebraica?

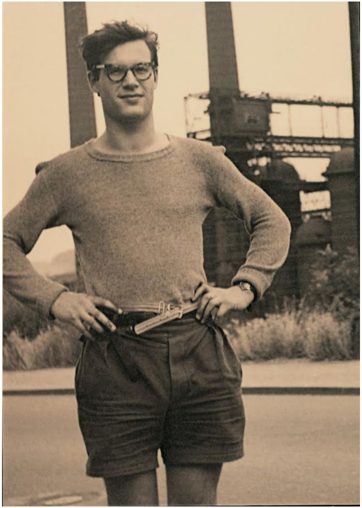
"La geometría algebraica es uno de los temas más antiguos y desarrollados de las matemáticas. Está íntimamente relacionada con la geometría proyectiva, el análisis complejo, la topología, la teoría de números y muchas otras áreas de la actividad matemática actual. Además, en los últimos años la geometría algebraica ha experimentado grandes cambios de estilo y lenguaje. Por estas razones ha surgido en torno a esta materia una reputación de inaccesibilidad."
(Prefacio a *Principles of Algebraic Geometry* de Griffiths y Harris)

Pero, ¿qué es la Geometría Algebraica?

- **Primera aproximación:**
  - Estudia soluciones de **ecuaciones polinómicas** (el tema de esta charla)
- También (según Dieudonné):
  - La clasificación de objetos algebraicos
  - El estudio de puntos infinitamente cerca (multiplicidad)
  - Extensión de los escalares (puntos complejos, puntos genéricos)
  - Extensión del espacio (espacio proyectivo, espacio n–dimensional, esquemas)
  - Análisis y topología en geometría algebraica (geometría compleja; algunas conjeturas de por medio, como las conjeturas de Hodge)
  - Álgebra conmutativa y geometría algebraica
- También:
  - Teoría de números
- *Et caetera*

Emmy Noether (1882–1935)

Alexander Grothendieck (1928–2014)



Un ejemplo sencillísimo, tres puntos de vista

Ejemplo sencillo: Geometría Algebraica Compleja

Problema

Consideremos la siguiente ecuación de grado 2:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

¿Cuántas raíces complejas tiene?

Respuesta

Exactamente dos[a]:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

donde Δ es el discriminante del polinomio $x^2 + bx + c$, es decir

$$\Delta = b^2 - 4c.$$

[a] Contadas con multiplicidad.

Ejemplo sencillo: Geometría Algebraica Real

Problema

Consideremos la siguiente ecuación de grado 2:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

¿Cuántas raíces reales tiene?

Respuesta

Tiene dos, una, o ninguna, dependiendo del signo de Δ:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

donde Δ es el discriminante del polinomio $x^2 + bx + c$, es decir

$$\Delta = b^2 - 4c.$$

Ejemplo sencillo: Geometría Semi-Algebraica

Problema

Consideremos la siguiente ecuación de grado 2:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

¿Cuántas raíces reales positivas tiene?

Respuesta

Tiene dos, una, o ninguna, dependiendo del signo de Δ, de b y de $b \pm \sqrt{\Delta}$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

donde Δ es el discriminante del polinomio $x^2 + bx + c$, es decir

$$\Delta = b^2 - 4c.$$

Una brevísima introducción a la geometría algebraica computacional

De vuelta al álgebra lineal: eliminación Gaussiana

Supongamos que tenemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

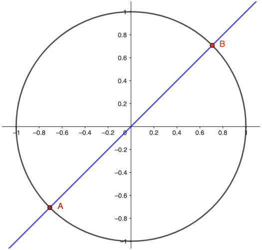
Si usamos la eliminación Gaussiana, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Este último sistema equivalente es mucho más sencillo que el primero, ya que nos dice las soluciones con muy poco o ningún esfuerzo.

¿Eliminación Gaussiana para sistemas de polinomios?

Intersección de una circunferencia con una recta:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

El siguiente sistema equivalente es mucho más sencillo

$$\begin{cases} y^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Bases de Gröbner

- El segundo sistema representa una Base de Gröbner del primero.
- Es mucho más sencillo leer las soluciones en la base de Gröbner.

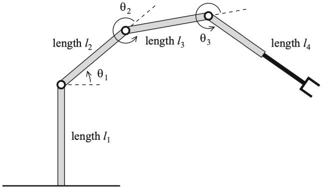
Algoritmo de Buchberger (complejidad $d^{2^{n+o(1)}}$)

Entrada: Un conjunto de polinomios finito F que genera un ideal I
Salida: Una base de Gröbner G para I

1. $G := F$
2. Para cada f_i, f_j en G, se denota por g_i al término líder de f_i con respecto del orden dado, y por a_{ij} al mínimo común múltiplo de g_i y g_j.
3. Se escogen dos polinomios en G, y se denota $S_{ij} = (a_{ij}/g_i)f_i - (a_{ij}/g_j)f_j$.
4. Se reduce S_{ij}, mediante el algoritmo de división multivariable, con respecto del conjunto G hasta que el resultado no se pueda reducir más. Si el resultado es distinto de cero, se añade a G.
5. Se repiten los pasos 2-4 hasta que todos los pares posibles hayan sido considerados, incluidos los que contienen polinomios añadidos en el paso 4.
6. Se devuelve G.

Ejemplos de aplicaciones

Ejemplo 1: Brazo robot



(Fuente:

Cox et al., Ideal, Varieties, and Algorithms)

Quieremos saber si podemos alcanzar un punto (a, b) con la mano del robot.
Hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a = l_3(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + l_2 \cos\theta_1 \\ b = l_3(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1) + l_2 \sin\theta_1 \end{cases}$$

Sistema polinómico equivalente (sustituir $\cos\theta_i \to c_i$ y $\sin\theta_i \to s_i$):

$$\begin{cases} a = l_3(c_1c_2 - s_1s_2) + l_2c_1 \\ b = l_3(c_1s_2 + c_2s_1) + l_2s_1 \\ 0 = c_1^2 + s_1^2 - 1 \\ 0 = c_2^2 + s_2^2 - 1 \end{cases}$$

G_0

$$\left|\; s_1 + \frac{a l_3}{a^2 + b^2} s_2 + \frac{-a^2 b - b^3 - b l_2^2 + b l_3^2}{2a^2 l_2 + 2b^2 l_2} \;\right|$$

$$R^1$$

G_1

$$\left|\; c_2 + \frac{-a^2 - b^2 + l_2^2 + l_3^2}{2 l_2 l_3} \;\right|$$

$$R^1$$

G_2

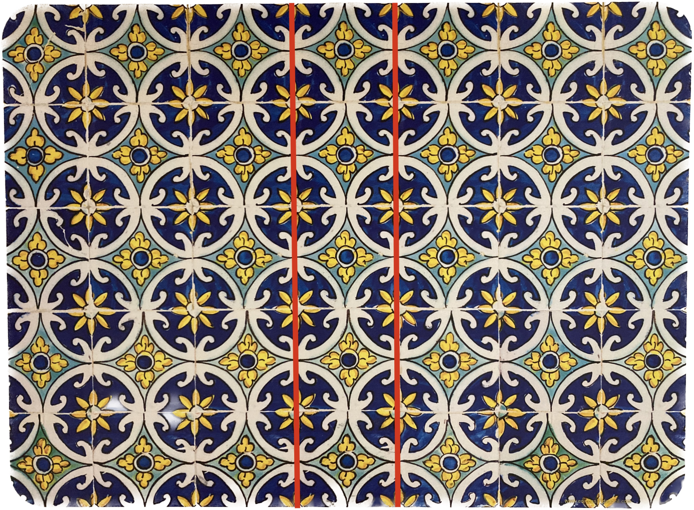
$$\left|\; c_1 + \frac{-b l_3}{a^2 + b^2} s_2 + \frac{-a^3 - a b^2 - a l_2^2 + a l_3^2}{2a^2 l_2 + 2b^2 l_2} \;\right|$$

$$R^1$$

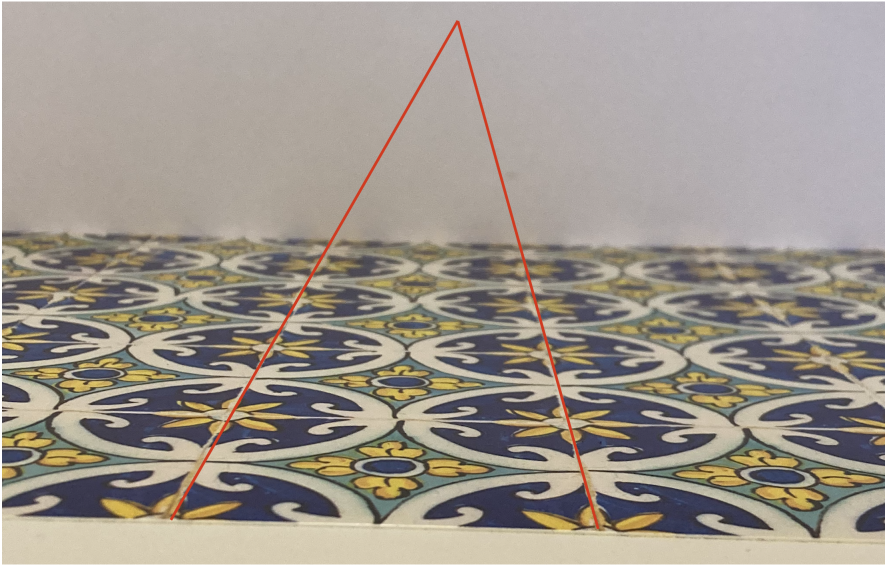
G_3

$$\left|\; s_2^2 + \frac{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - 2a^2 l_2^2 - 2b^2 l_2^2 + l_2^4 - 2a^2 l_3^2 - 2b^2 l_3^2 - 2 l_2^2 l_3^2 + l_3^4}{4 l_2^2 l_3^2} \;\right|$$

Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas



Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas

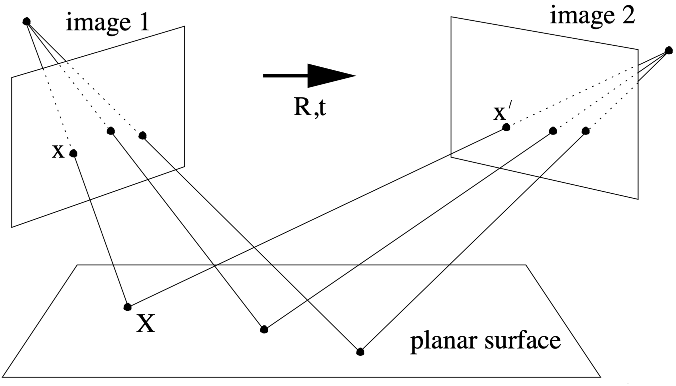


Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas

[Pietro Perugino, Entrega de las llaves de San Pedro]

Ejemplo 2: Arte, visión artificial e intersección de paralelas

Ya no es adecuado usar $\mathbb{R}^2$ (plano Euclídeo), sino $\mathbb{P}^2$ (plano proyectivo).



[Fuente: Hartley et al., Multiple View Geometry in computer vision]

Ejemplo 3: Estadística Algebraica

- Variable aleatoria X que puede tomar los valores 0, 1, 2 con probabilidades p_1, p_2, p_3.
- Los números p_1, p_2, p_3 satisfacen

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1.$$

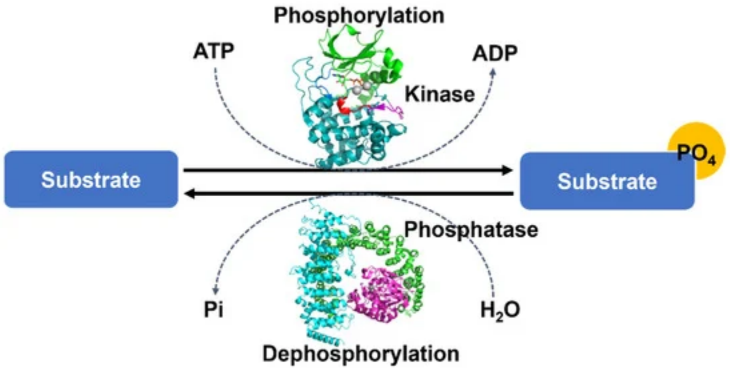
- Si X es una variable aleatoria binomial con parámetro q y $n = 2$, entonces

$$p_i = \binom{2}{i} q^i (1-q)^{2-i},$$

en cuyo caso p_1, p_2 y p_3 satisfacen

$$4p_0p_2 - p_1^2 = 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1.$$

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante "real"



[Fuente: Seok, S.-H. Structural Insights into Protein Regulation by Phosphorylation and Substrate Recognition of Protein Kinases/Phosphatases. Life 2021, 11, 957]

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante "real"

$$A + E_1 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} AE_1 \xrightarrow{k_3} A_p + E_1 \underset{k_5}{\overset{k_4}{\rightleftarrows}} A_pE_1 \xrightarrow{k_6} A_{pp} + E_1$$

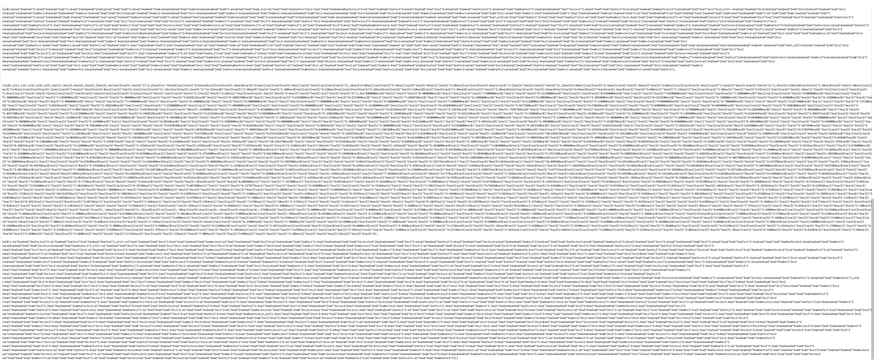
$$A_{pp} + E_2 \underset{k_8}{\overset{k_7}{\rightleftarrows}} A_{pp}E_2 \xrightarrow{k_9} A_p + E_2 \underset{k_{11}}{\overset{k_{10}}{\rightleftarrows}} A_pE_2 \xrightarrow{k_{12}} A + E_2$$

$$\begin{aligned}
[\dot{S}] &= -k_1[S][K] + k_2[SK] + k_{12}[S_pP] \\
[\dot{K}] &= -k_1[S][K] + (k_2 + k_3)[SK] - k_4[K][S_p] + (k_5 + k_6)[S_pK] \\
[\dot{SK}] &= k_1[S][K] - (k_2 + k_3)[SK] \\
[\dot{S_p}] &= k_3[SK] - k_4[K][S_p] + k_5[S_pK] + k_9[S_{pp}P] - k_{10}[S_p][P] + k_{11}[S_pP] \\
[\dot{S_pK}] &= k_4[K][S_p] - (k_5 + k_6)[S_pK] \\
[\dot{S_{pp}}] &= k_6[S_pK] - k_7[S_{pp}][P] + k_8[S_{pp}P] \\
[\dot{P}] &= -k_7[S_{pp}][P] + (k_8 + k_9)[S_{pp}P] - k_{10}[S_p][P] + (k_{11} + k_{12})[S_pP] \\
[\dot{S_{pp}P}] &= k_7[S_{pp}][P] - (k_8 + k_9)[S_{pp}P] \\
[\dot{S_pP}] &= k_{10}[S_p][P] - (k_{11} + k_{12})[S_pP].
\end{aligned}$$

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante “real”

```
### Output:
SO2sites := [[[a[0],a[1],a[2],a[3],a[4],a[5],2*a[2],3*a[3],4*a[4],5*a[5],25*a[5],4*(5*a[3]*a[5]-2*a[4]^2)^2,
```

Ejemplo 5: Bioquímica y un discriminante “real”



Trabajo de Fin de Grado:
Geometría Computacional
Aplicaciones a alguno de los temas mencionados
Geometría Algebraica más teórica
etc.

Bibliografía:

1. Cox, Little, O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms
2. Dieudonné, The Historical Development of Algebraic Geometry
3. Griffiths, Harris, Principles of Algebraic Geometry
4. Hartley, Zisserman, Multiple View Geometry in computer vision

¡Muchas Gracias!
Vă Mulțumesc!