EUCLIDES, DESCARTES Y STURM:

LA BÚSQUEDA DE LAS RAÍCES REALES DE UN POLINOMIO.

¿DEMASIADO "ANTICUADOS" PARA CONTARLOS EN EL AULA DE SECUNDARIA?

(AMPLIACIÓN DE UN TRABAJO QUE REALICÉ EN LA ASIGNATURA DE ANGÉLICA BENITO)

Alexandru Iosif

Saint Louis University – Madrid Campus

(Visitante en la UAM)

(Teano)
De Mujeresconciencia.com

División "Euclídea" antes de Euclides

- *"A mi juicio, todo este libro* **[Libro VII]** *debe atribuirse a los pitagóricos previos a Arquitas."*
  (van der Waerden, Science Awakening)

Arquitas: ¿maestro o discípulo de Platón?

- *"[…] y que estuvo mucho tiempo con Arquitas de Tarento y Timeo de Locris,* **,** *y se hizo con los comentarios de Filolao, y que, como la fama de Pitágoras dominaba en ese momento y lugar, se entregó a la escuela de Pitágoras y a esos estudios."*
  (Cicerón, De re publica)
- *"[…] sin embargo, al principio fue despreciado* **[Arquitas]** *y debió sus notables progresos a estudiar con Platón"*
  (Demóstenes, Ἐρωτικός)

Euclides, Libro VII

Proposición 1: *Dados dos números desiguales y restando sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.*

Proposición 2: *Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*

El algoritmo de Euclides calcula el máximo común divisor de dos números.

Ejemplo:

24 y 14: 24 -14 = **12**, 14 – 12 = **2**, 12 – 6·**2** = **0**.

Por lo tanto el máximo común divisor de 24 y 14 es **2**.

Museo de Historia Natural de la Universidad de Oxford

(De Turismo Matemático)

¿Y en otros anillos?

Siglos XIX XX:

- Culpables de ampliar este algoritmo a otros anillos (anillos Euclídeos).
- Siglo XX: Culpable de la denominación **división Euclídea** (es decir, división con resto en anillos Euclídeos).

Ejemplo:

Consideremos los polinomios $\mathrm{P(x)} = x^5 + 2x^3 + x$ y $\mathrm{Q(x)} = x^4 - 1$. Podemos usar exactamente el mismo algoritmo para calcular el mcd(P, Q):

$$(x^5 + 2x^3 + x) - \mathrm{x}(\mathrm{x}^4 - 1) = \left(\mathbf{2x^3 + 2}\boldsymbol{x}\right),$$

$$(\mathrm{x}^4 - 1) - \frac{1}{2}x(2\mathrm{x}^3 + 2x) = \left(\boldsymbol{-x^2 - 1}\right),$$

$$(2\mathrm{x}^3 + 2x) - (-2x)\left(\boldsymbol{-x^2 - 1}\right) = \mathbf{0}.$$

Así que mcd$(P, Q) = \boldsymbol{-x^2 - 1}$.

Polinomios vs. números enteros

Parece que estos polinomios se comportan *como si fueran números*.

"El estudio de dominios cada vez más abstractos y complejos no hizo tambalearse la convicción, madurada en el siglo XIX, de que cualquier cosa puede relacionarse con el simple concepto de número entero, mientras que el número entero, a su vez, puede relacionarse con el todavía más simple concepto de conjunto."

(Zellini, La matemática de los dioses y los algoritmos de los hombres)

(De Blog de Matemáticas y TIC's)

Sturm

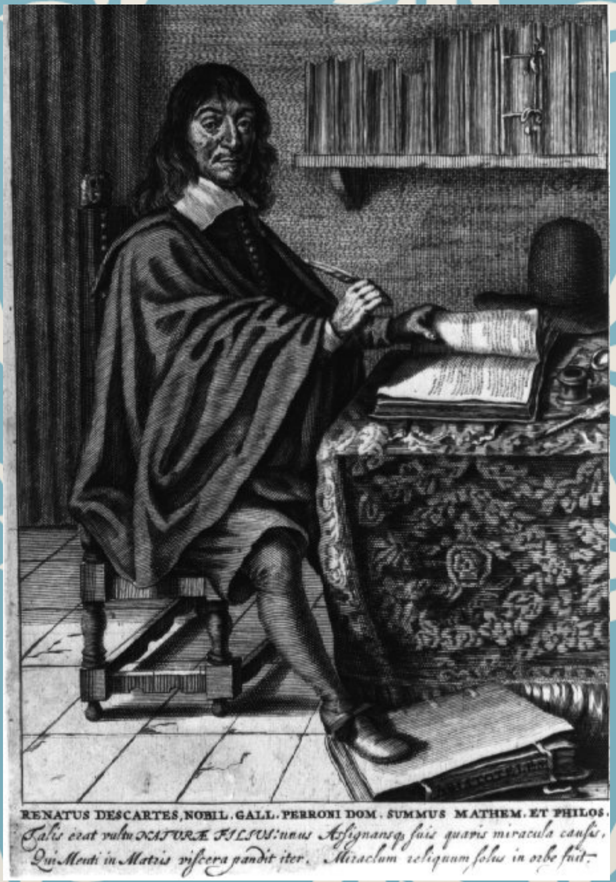
Sturm (1829) introduce una variante de la división Euclídea, para un caso muy concreto:

- Se empieza dividiendo un polinomio entre su derivada.
- Y en vez de quedarnos con el resto de la división, nos quedamos con su negativo.
- Y seguimos, hasta llegar al cero.

¿Qué conseguimos con ello?

- Un método para contar las raíces de un polinomio en cualquier intervalo.

Porträt des jungen Wissenschaftlers. Öl auf Leinwand von François d'Albert-Durade nach einer 1822 angefertigten Skizze von Sturms Kollege Jean-Daniel Colladon (Bibliothèque de Genève).



(Descartes)
De Wikimedia Commons

Regla de los signos de Descartes

- Se trata de un algoritmo introducido por Descartes en 1637.
- Acota el número de raíces positivas $n_+(p)$ de cualquier polinomio p en un intervalo:

$$n_+(p) \leq N(p), \qquad \text{con} \quad n_+(p) \equiv N(p) \pmod 2,$$

Donde $n_+(p)$ se cuentan con multiplicidad.

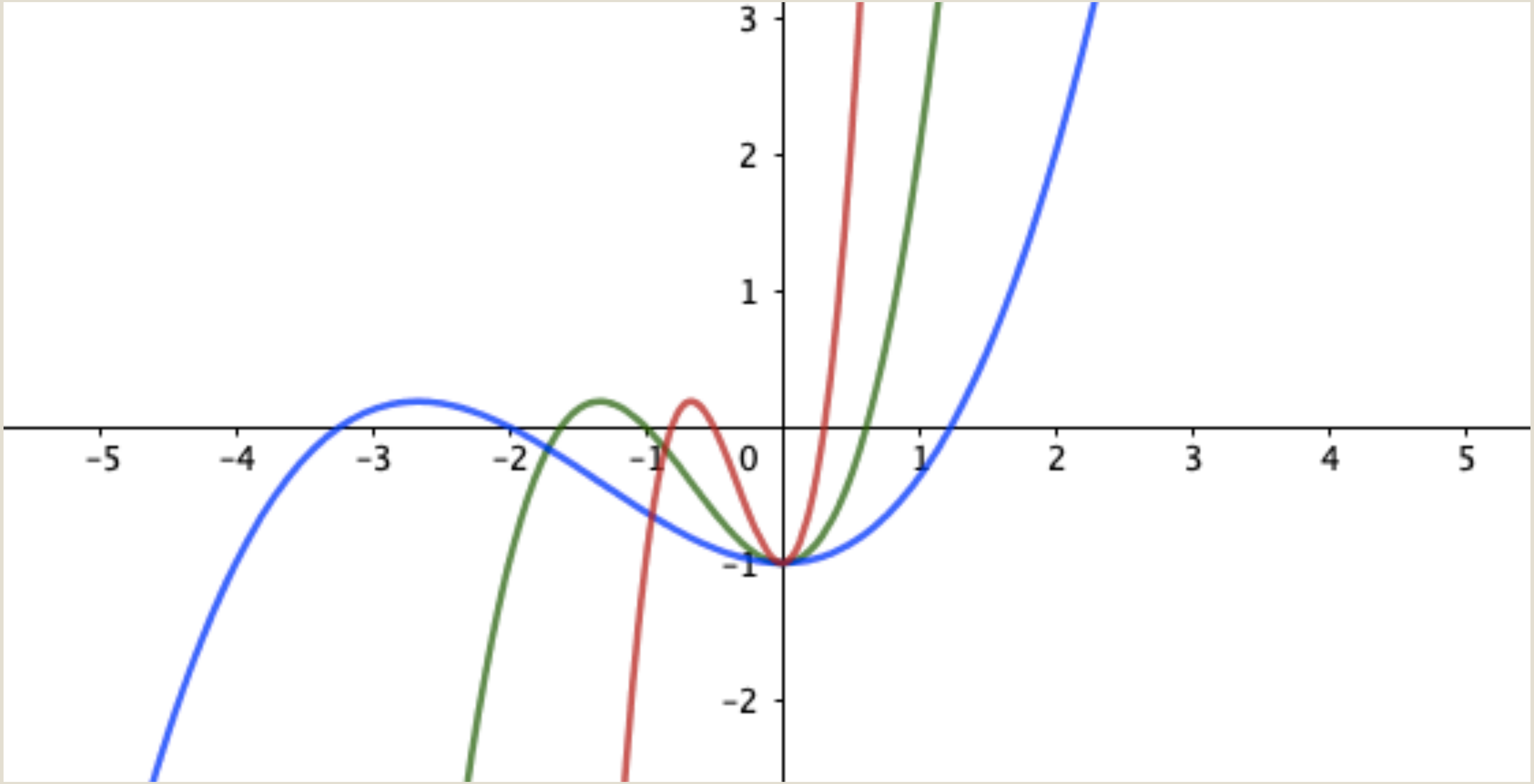
Ejemplo: $\mathrm{p} = x^3 + x + 1$ no tiene raíces positivas porque $N(p) = 0$.

Con una transformación podemos acotar el número de raíces en cualquier intervalo

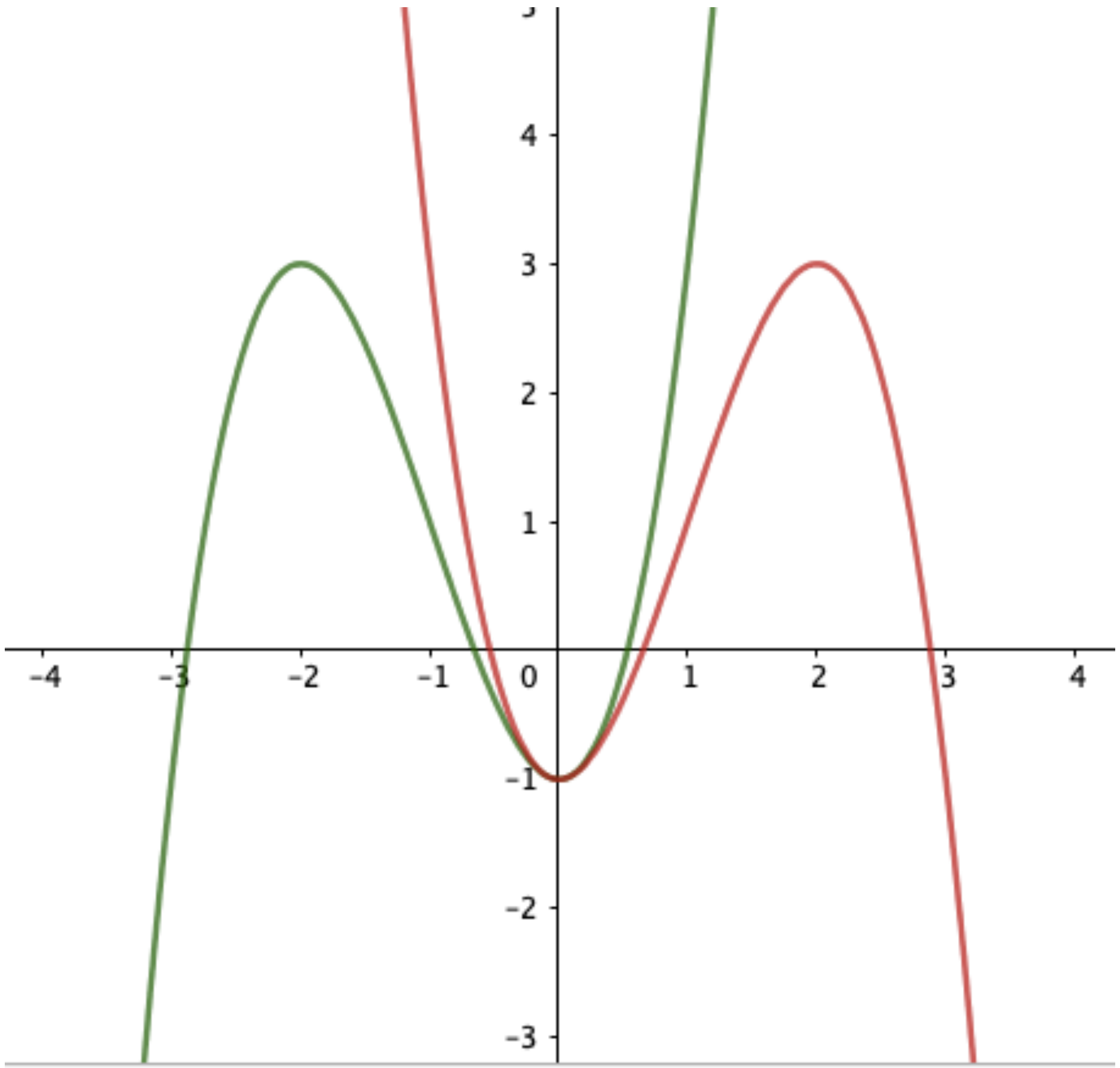
$$\boldsymbol{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad \boldsymbol{con\ ad - bc \neq 0}.$$

Ejemplo: Con la transformación $x \mapsto -x$, obtenemos para las raíces negativas:

$$n_- \leq N(p(-x)), \qquad \text{con } n_-(p) \equiv N(p(-x)) \pmod 2.$$



3
2
1
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5



4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

On connoist aussy de cecy combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fausses en chasque Equation. A sçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que les signes + & -- s'y trouuent de fois estre changés ; & autant de fausses qu'il s'y trouue de fois deux signes +, ou deux signes -- qui s'entresuiuent. Comme en la derniere, a cause qu'aprés $+ x^4$ il y a $-- 4x^3$, qui est vn changement du signe + en --, & aprés $-- 19xx$ il y a $+ 106x$, & aprés $+ 106x$ il y a $-- 120$ qui sont encore deux autres changemens, on connoist qu'il y a trois vrayes racines; & vne fausse, a cause que les deux signes --, de $4x^3$, & $19xx$, s'entresuiuent.

Combien il peut y auoir de vrayes racines en chasque Equatiõ.

De plus il est aysé de faire en vne mesme Equation, que toutes les racines qui estoient fausses deuienent vrayes, & par mesme moyen que toutes celles qui estoiēt vrayes deuienent fausses : a sçauoir en changeant tous les signes + ou -- qui sont en la seconde, en la quatriesme, en la sixiesme, ou autres places qui se designent par les nombres pairs, sans changer ceux de la premiere, de la troisiesme, de la cinquiesme & semblables qui se designent par les nombres impairs.

Cõment on fait que les fausses racines d'vne Equation deuienẽt vrayes, & les vrayes fausses.

LA GEOMETRIE DE RENÉ DESCARTES.

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, ruë saint Iacques, au Lion d'or.

M. DC. LXIV.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Ejemplo 1:

Demostrar que el siguiente polinomio tiene exactamente 1 raíz real:

$$\mathrm{p(x) = x^5 + 1.}$$

Solución:

En primer lugar, podemos ver que $p(x)$ no tiene ninguna raíz positiva, pues $N(p) = 0$. En segundo lugar, podemos observar que el número de cambios de signos en los coeficientes de $p(-x) = -x^5 + 1$ es $\mathrm{N(p(-x)) = 1}$, por lo que $p(x)$ tiene como mucho una raíz positiva; además sabemos que $n_-(p) \equiv N\big(p(-x)\big) \pmod 2$; concluimos que p tiene exactamente una raíz negativa. Como demostramos este polinomio que no tenía ninguna raíz positiva, concluimos que tiene exactamente una raíz real. Es muy fácil ver que esta raíz es $x = -1$. ■

Ejemplo 2:

Mostrar que, usando solamente la regla de los signos de Descartes sobre $p(x)$ y sobre $p(-x)$, donde

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1,$$

no es posible calcular exactamente el número de raíces reales de $p(x)$.

Solución:

Observamos que los coeficientes de $p(x)$ no cambian de signo, por lo que concluimos que $p(x)$ no tiene raíces positivas. Vamos a ver cuántas raíces negativas tiene este polinomio. Para ello, primero calculamos

$$p(-x) = -x^3 + x^2 - x + 1,$$

y observamos que sus coeficientes cambian de signo 3 veces. Concluimos que $p(x)$ tiene o 3 o 1 raíz negativa. ■

Sturm
De Wikimedia Commons

Secuencias de Sturm

- La secuencia $S(p)$ de Sturm de $p(x)$ es una secuencia de polinomios no nulos $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ que dependen de $p(x)$ mediante la siguiente recurrencia:

$$s_0 = p(x),$$
$$s_1 = p'(x),$$
$$s_i = -\mathrm{rem}\,(p_{i-2}, p_{i-1}).$$

- Para cualquier número $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, denotemos por $\chi_p(a)$ el número de variaciones de signos de la secuencia

$$(s_0(a), s_1(a), s_2(a), \ldots).$$

Mathématiques. 419

271. ANALYSE D'UN MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES; par M. Ch. STURM. (Lu à l'Acad. roy. des Scien., le 23 mai 1829.)

La résolution des équations numériques est une question qui n'a pas cessé d'occuper les géomètres depuis l'origine de l'algèbre jusqu'à nos jours. La véritable difficulté de ce problème se réduit, comme on sait, à trouver, pour chaque racine réelle de l'équation proposée, deux limites, entre lesquelles cette racine soit seule comprise. Les différentes méthodes qui ont été proposées pour arriver à ce but sont trop connues pour qu'il soit nécessaire de les rappeler ici. Aucune ne peut être comparée, sous le double rapport de la simplicité et de l'exactitude, à celle que M. Fourier a depuis long-temps découverte, et qui est fondée sur une proposition générale, dont la règle des signes de Descartes n'est qu'un cas particulier. M. Fourier a fait connaître les prin-

Teorema de Sturm (Jacques Charles François Sturm; 1829):

Sea $p(x)$ un polinomio real. Entonces el número de raíces reales de $p(x)$ halladas en un intervalo arbitrario (a, b), donde $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, es igual a

$$|\chi_p(a) - \chi_p(b)|.$$

Ejemplo 3:

Calcular el número de raíces reales del siguiente polinomio

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Solución:

Empecemos por calcular la secuencia de Sturm de p(x). Usamos la siguiente página para este cálculo: https://planetcalc.com/7719/

$$s_0 = p(x) = x^3 + x^2 + x + 1,$$

$$s_1 = p'(x) = 3x^2 + 2x + 1,$$

$$s_2 = -\text{rem}\,(s_0, s_1) = -\frac{4}{9}x - \frac{8}{9},$$

$$s_3 = -\text{rem}\,(s_1, s_2) = -9.$$

Ahora bien, si queremos calcular el número de raíces reales, el intervalo en cuestión es $[-\infty, +\infty]$. Calculemos pues el número $\chi(\pm\infty)$:

$$\chi(-\infty) = (-\infty, +\infty, +\infty, -9) = 2,$$

$$\chi(+\infty) = (+\infty, +\infty, -\infty, -9) = 1.$$

Concluimos que $p(x)$ tiene $|\chi(-\infty) - \chi(+\infty)| = |2 - 1| = 1$ raíz real. ■

Aplicación al aula

Ampliación de Matemáticas en 4º de ESO (Académicas)

¿También una sesión de ESTALMAT?

Alguna extensión más avanzada de 1º de Bachillerato, si es que queremos demostrar algunas cosillas más.

- Intro teórica de ecuaciones de 2º grado, con ejemplos.
- Representar en GeoGebra los siguientes polinomios y averiguar cuántas raíces tienen en los intervalos. Hacer también cálculos analíticos.

❖ Raíces positivas y negativas de $x^2 - 1$.

❖ $2x^2 + x - 1$ en $(0,1)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ y $(-2, -\frac{1}{2})$.

❖ $x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $(0,2)$.

❖ $x^2 + x + 1$ en $\mathbb{R}$.

- Ver qué ocurre cuando dividimos los polinomios por uno de sus factores y paralelismo con los enteros.
- Hacer también un ejemplo de división por **no factores**. **Justificar el Algoritmo de Euclides.**

Sesión 1

(grupos de 3 estudiantes)
[cf., Bonals, *El trabajo en pequeños grupos en el aula*]

Sesión 2
(grupos de 3 estudiantes)

- Regla de los signos de Descartes para raíces positivas y negativas.
- Se aplica la regla de los signos de Descartes a los polinomios de la sesión anterior, y se pregunta si los resultados son compatibles con los de la sesión anterior.
- Ejemplos de grado mayor, con la regla de Descartes y GeoGebra.
- **Esto se podría justificar en 1º de Bachillerato.**

Sesión 3

(grupos de 3 estudiantes)

- La regla de Descartes no calcula exactamente el número de raíces.
- Se mencionan las secuencias de Sturm (mostrando **o no** cómo se calculan).
- Para el cálculo se podría usar la página https://planetcalc.com/7719/
- Esto se combinará con el uso de GeoGebra
- Se aplican estas secuencias a los polinomios de las sesiones anteriores.
- **Trabajo para el futuro:** ¿Cómo justificarlo en 4º de ESO o en 1º de Bachillerato?

Sesión 4

(grupos de 3 estudiantes)

- Recolectar datos.
- ¿Comunicación en matemáticas?
- Comprobar si el alumnado ha entendido las justificaciones de estos métodos.

Referencias:

- Basu, S., Pollack, R., Roy, M.-F (2008). *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Publisher: Springer-Verlag, Second edition.
- Bonals, J. (2000): *El trabajo en pequeños grupos en el aula*. Editorial Graó.
- Descartes, R. *La géométrie*. Hermann (1886).
- *Sturm, J.C.F. (1829). "Mémoire sur la résolution des équations numériques". Bulletin des Sciences de Férussac. **11**: 419–425.*
- van der Waerden, B. L (1961). *Science Awakening*, Publisher: Oxford University Press.
- Zellini, P. (2016/2018). *La matemática de los dioses y los algoritmos de los hombres*. Siruela.

¡Gracias!

Vă mulțumesc!